Ответы и решения олимпиадных задач

5 класс

№1. Девять кроликов за 3 дня съедают 27 кг сена. Сколько кг сена нужно шести кроликам на 6 дней?

Решение.

1) Найдем количество сена, которое необходимо девяти кроликам на 1 день: 27 : 3= 9 (кг).

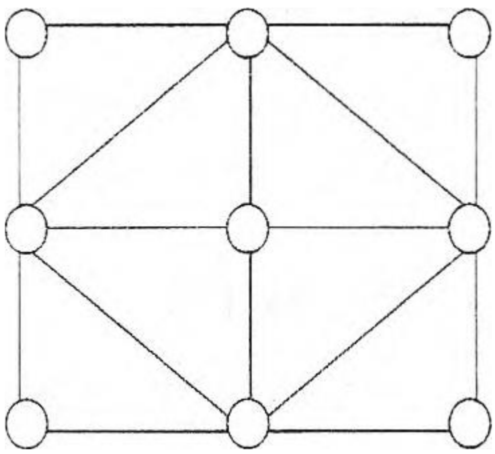
2) Найдем, сколько сена съедает 1 кролик за 1 день: 9 : 9 = 1 (кг).

3) Найдем, сколько сена необходимо шести кроликам на 1 день: 6 · 1 = 6 (кг).

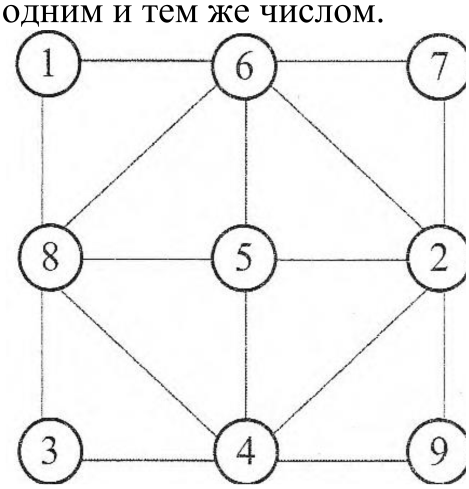
4) Найдем, сколько сена съедят шесть кроликов за 6 дней: 6 · 6 = 36 (кг).

Ответ: 36 кг.

№2 Все цифры от 1 до 9 впишите в кружочки так, чтобы сумма цифр, стоящих в вершинах каждого квадрата, была одним и тем же числом.



Ответ:



№3. Аня открыла книгу и обнаружила, что сумма номеров левой и правой страниц - 45. Чему равно произведение этих номеров?

Решение.

Так как это левая и правая страницы, то номер правой на 1 больше номера левой. (45 - 1) : 2 = 22. Значит, это страницы 22 и 23.

22 · 23 = 506.

Ответ: 506.

№4

В пакете лежали шарики одинаковой формы и одинакового размера: синего, белого и желтого цветов. Сколько нужно достать (не глядя в пакет) шариков, чтобы среди них попалось 3 белых, , если синих было – 10 шт., белых – 5 шт., а желтых – 8 шт.?

***Решение*:**

10+8+3=21 (шт.)

Если достать 21 шарик, то среди них обязательно попадется 3 белых шарика.

№5

На новогодний праздник ученики 5 класса Иванов, Петров и Сидоров должны были подготовить стихотворение, танец и песню. Во время репетиции выяснилось, что Иванов не будет читать стихотворение, Сидоров не будет петь, Иванов будет петь, а Сидоров не будет читать стихотворение. Во время подготовки к празднику учитель выяснил, что из четырех вариантов только один соответствует действительности. Кто же из учеников во время праздника пел, танцевал и читал стихотворение?

***Решение*:**

Иванов	- не стих, песня	- ложь	- ложь	тогда, стих
Петров	-			танец
Сидоров	- не песня, не стих	- ложь	- истина	тогда, песня

Ответ: Иванов – стих, Петров – танец, Сидоров – песня.

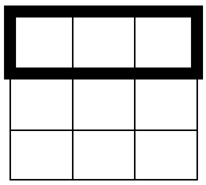
6 класс

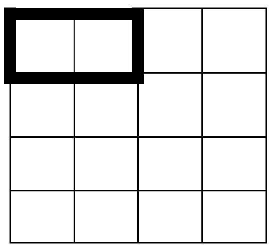
<u>№1</u>

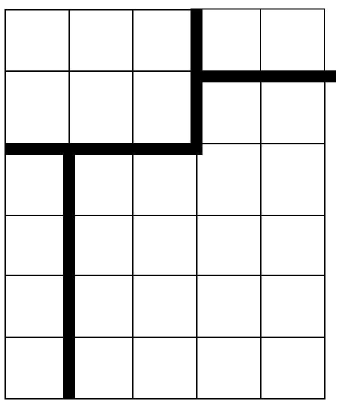
Число делится на 36, если оно делится и на 4, и на 9. Так как сумма цифр 5, 2, 2 равна 9, то сумма двух недостающих цифр должна равняться 0, 9 или 18. Учитывая, что число должно делиться на 4, а предпоследняя цифра равна 2, то последняя цифра может быть лишь 0, или 4, или 8.

Тогда ответами будут числа 52524, 52128,52020,52920.

<u>№2</u>







№3

П	**И**	**Т**	**О**	**Н**
И18	Н10	О12	П3	Т13
О17	Т15	И1	Н8	П14
Н	**О**	П4	Т6	И7
Т2	П16	Н11	И9	О5

№4

Пусть Романенко приехал из Кировск, тогда Белов - не из Стаханов, а Коваль из Алчевск и оказывается, что Романенко должен быть из Свердловска. Поэтому первое утверждение ложное, а значит Белов приехал из Стаханов

Пусть Ефремов приехал из Краснодона, а Ужвий из Свердловска, но тогда из заявления Ужвий следует, что Ефремов приехал из Алчевска. Из чего следует, что Ужвий приехал из Свердловска.

Коваль приехал из Краснодона (это следует из его заявления, потому что Романенко приехал не из Свердловска).

Романенко не мог приехать из Свердловска, Стаханова, Краснодона и Кировска, а значит он из Алчевска. Поэтому Ефремов из Кировска.

№5

21 отрезок

7 класс

№1

Число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 9 и на 4.

Сумма всех десяти цифр делится на 9, поэтому любое число, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу, делится на 9.

Самым большим таким числом является число 9876543210.

Но оно не делится на 4 (ибо число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на 4.

Нужно добиться делимости на 4, минимально уменьшив при этом число.

Очевидно, число 9876543120 делится на 4.

Ответ. 9876543120.

№2

Игнату сейчас вчетверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое младше его. Сколько лет сейчас Игнату, если через 15 лет ему и сестре вместе будет 100 лет?

Указание:

Пусть сестре Игната было x лет в момент, когда она была вчетверо младше его.

«Тогда» Игнату было $2x$ лет, а сейчас ему $4x$ лет.

Решение:

С момента, когда Игнату было $2x$ лет, до сегодняшнего дня, когда ему $4x$ лет, прошло $2x$ лет.

Поэтому сестре сейчас $x + 2x = 3x$ лет.

Через 15 лет Игнату будет $4x + 15$, а сестре — $(3x + 15)$ лет.

Следовательно,

$$(4x + 15) + (3x + 15) = 100,$$

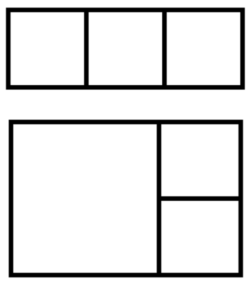
откуда $x = 10$.

Ответ. 40 лет.

№3

Ответ 397*34=13498

№4



Решение. Составить прямоугольник из трех квадратов можно двумя различными способами.

В первом случае площадь каждого квадрата составляет 1/3 площади прямоугольника и равна 150:3=50 см^2. Но так как сторона каждого квадрата должна быть целым числом, это невозможно. Следовательно, квадраты расположены вторым способом. При этом суммарная площадь маленьких квадратов составляет половину площади большого, поэтому она равна 150:3 = 50 см^2. Значит, площадь маленького квадрата равна 50:2=25 см^2, а сторона – 5 см. Тогда стороны прямоугольника 10 см и 15 см, а его периметр – 50 см.

Ответ: 50 см.

№5

X+0,1x+10x=3898,32

Овет;35,12; 351,2; 3512

8 класс

№1

На доске записано число 23. Каждую минуту число стирают с доски и записывают вместо него произведение его цифр, увеличенное на 15. То есть, через одну минуту на доске будет записано 21($2\cdot3+15=21$). Какое число будет записано на доске через час?

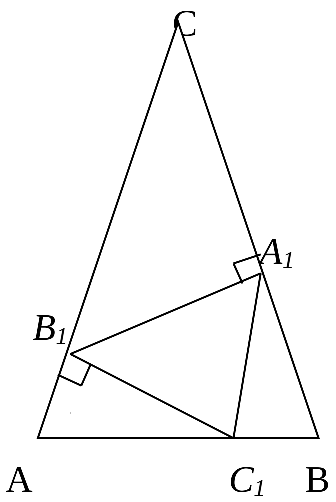
Решение.
Через несколько первых минут на доске будет записано:
через одну минуту $2\cdot3+15=21$;
через две минуты $2\cdot1+15=17$;
через три минуты $1\cdot7+15=22$;
через четыре минуты $2\cdot2+15=19$;
через пять минут $1\cdot9+15=24$;
через шесть минут $2\cdot4+15=23$;
через семь минут $2\cdot3+15=21$.

Через шесть минут числа начинают повторяться. Значит, за 1 час (60 минут) пройдет ровно 10 циклов по шесть минут. Поэтому, через час на доске будет записано число 23.
Ответ: 23

№2

Доказательство:

Пусть $\angle A = \angle B = \alpha$. Тогда $\angle C = \pi - 2\alpha$. Треугольник CA_1B_1 прямоугольный, значит, $\angle CB_1A_1 = \pi/2 - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha - \pi$. Тогда $\angle A_1B_1C_1 = \pi/2 - (2\alpha - \pi/2) = \pi - 2\alpha$. Так как $B_1A_1 = B_1C_1$, $\angle B_1C_1A_1 = \angle B_1A_1C_1 = \alpha$. Значит, $\angle AC_1A_1 = \angle AC_1B + \angle BC_1A_1 = (\pi/2 - \alpha) + \alpha = \pi/2$, то есть, A_1C_1 перпендикулярно AB.



№3

Решение:

Одинаковое количество чёрных и белых клеток может быть только в квадратах 2x2 или 4x4 (в остальных квадратах всего нечётное количество клеток, поэтому черных и белых среди них не может быть поровну). Неподходящих квадратов 2x2 только два (оба из которых содержат центр таблицы, а клеток выше центра не содержат), значит, подходящих квадратов 2x2 ровно 16 – 2 = 14. А среди квадратов 4x4 нам подходят только оба нижних.

Итак, всего квадратов, в которых поровну чёрных и белых клеток, ровно 14 + 2 = 16.

Ответ: 16

№4

Запишем данную сумму в виде $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ и преобразуем перемножив первый и четвертый множители, второй и третий:

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)((n^2+3n)+2)+1=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=((n^2+3n)+1)^2$.

№5

Решение:

Из условия следует, что сумма чисел x, y, z равна $60 \cdot 3 = 180$. Тогда $\frac{x+y}{z}=\frac{180-z}{z}=\frac{180}{z}-1 \le \frac{180}{10}-1=17$, сколькy $z \ge 10$. Заметим также, что при x=90, y = 80, z = 10 значение 17 достигается.

Ответ: 17

9 класс

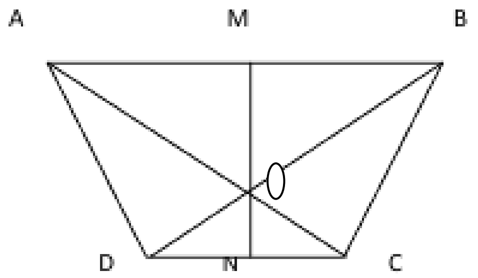
№1

Решение: Пусть 152347=a, тогда

$\sqrt{a^4+\mathbf{2}\cdot a^2+\mathbf{1}}$ - $\sqrt{a^4-\mathbf{2}\cdot a^2+\mathbf{1}}=\sqrt{(a^2+\mathbf{1})^2}$ - $\sqrt{(a^2-\mathbf{1})^2}$**=**$(a^2$**+1) – (**$a^2$**-1)=2.**

Ответ: 2

№2



Решение

По условию AC перпендикулярно BD. Проведем высоту трапеции MN через точку пересечения диагоналей трапеции.

Треугольники AOB и DON прямоугольные равнобедренные. OM , ON соответственно их высоты. Следовательно В прямоугольном треугольнике AMO угол $\angle AOM = 45^0$ и он тоже равнобедренный OM =AM. Аналогично доказываем, что DN =NO

Найдем площадь трапеции $S = \frac{AB+DC}{2}$ NM,

AB= 2AM , DC =2 DN , AB +DC= 2AM+2 DN=2(AM+ DN) = 2(MO+ON). Подставим в формулу $S = \frac{AB+DC}{2}$ NM= $S = \frac{AB+DC}{2}$ NM = $\frac{2(AM+DN)}{2}$ NM=

$\frac{2(MO+ON)}{2}$ NM= $NM^2 = h^2$.

№3

Решение:

Из условия следует, что сумма чисел x, y, z равна $60 \cdot 3 = 180$. Тогда $\frac{x+y}{z} = \frac{180-z}{z} = \frac{180}{z} - 1 \le \frac{180}{10} - 1 = 17$, сколько $z \ge 10$. Заметим также, что при x=90, y = 80, z = 10 значение 17 достигается.

Ответ: 17

№4

Введем обозначения м – мед, с- сгущенка, в- варенье.

По условию

3м + 4с + 2в > 2м + 3с + 4в,

откуда

м + с > 2в. (*)

По условию же

3м + 4с + 2в > 4м + 2с + 3в,

откуда

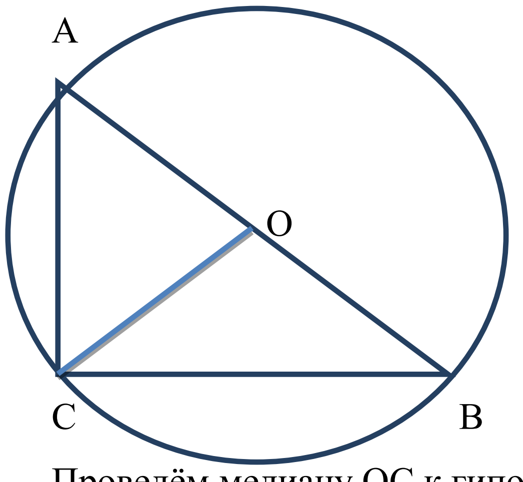
2с > м + в.(**)

Складывая неравенство (**) с неравенством (*), получаем м + 3с > м + 3в, откуда с > в.

Ответ: от сгущенки.

№5

Решение: Проведём высоту треугольника. Для любого треугольника, хотя бы одна высота лежит внутри треугольника. Такая высота делит исходный треугольник на два прямоугольных треугольника. Аналогично можно разделить каждый из полученных треугольников на два прямоугольных треугольника. Таким образом, получаем n прямоугольных треугольников. В каждом из них проведём медиану из вершины прямого угла к гипотенузе. Полученные треугольники равнобедренные. Докажем это. Рассмотрим один из полученных треугольников ABC.



Проведём медиану OC к гипотенузе AB.

По свойству окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника её центр лежит на середине гипотенузы AB, OA=OC=OB – радиусы этой окружности. Значит треугольники AOC и BOC – равнобедренные.

10 класс

№1

$x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0$. Преобразуем левую часть неравенства сгруппировав слагаемые :

$(x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 6y + 9) + 1 > 0$, $(x+y)^2 + (y+3)^2 + 1 > 0$.

№2

Известно, что числа a, b, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ – рациональные. Докажите, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ – тоже рациональные числа.

Решение

Рассмотрим произведение

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Число $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, которое равно отношению чисел a – b и $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, является рациональным, так как частное от деления двух рациональных чисел – число рациональное. Сумма двух рациональных чисел

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = \sqrt{a}$$ – число рациональное,

их разность, $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = \sqrt{b}$,

тоже рациональное число, что и требовалось доказать.

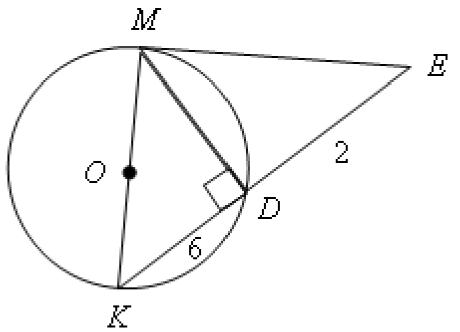
№3

Найти градусную меру дуги *MD*.

$\angle MDK = 90°$, так как опирается на диаметр.

$MD = \sqrt{6 \cdot 2} = 2\sqrt{3}$.

$\operatorname{tg} MKD = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, то есть $\angle MKD = 30°$, а значит, $\cup MD = 60°$.



<u>Ответ :</u> $\cup MD = 60°$.

№4

Решение

Будем считать, что скорость роста износа колеса является постоянной и не зависит от того насколько оно давно служит.

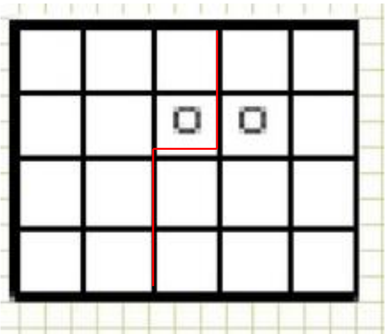
Очевидно, что задние колёса изнашиваются в 1,5 раза быстрее передних. Значит, когда задние колёса износятся на 60%, то передние – только на 40%. Это произойдёт после пробега

$$0{,}6 \cdot 14000 = 0{,}4 \cdot 21000 = 8400 \text{ (км)}.$$

В этот момент и следует сменить колёса. Оставшийся 40%-й ресурс задних колёс, поставленных спереди, и 60%-й ресурс передних колёс, поставленных сзади, очевидно, исчерпается одновременно, и произойдёт это ещё через 8400 км. Таким образом максимальный пробег составляет $2 \cdot 8400 = 16800$ км.

Ответ: 16800 км.

№5



11 класс

№1

Решение

Первый ответ говорит о том, что всего детей — трое. Хорошо, но явно недостаточно для того, чтобы вычислить возраст.

Второй ответ говорит о том, что в сумме детям 13 лет. Запишем все возможные комбинации возрастов, которые подходят под это условие:

1 + 1 + 11 = 13

1 + 2 + 10 = 13

1 + 3 + 9 = 13

1 + 4 + 8 = 13

1 + 5 + 7 = 13

1 + 6 + 6 = 13

2 + 2 + 9 = 13

2 + 3 + 8 = 13

2 + 4 + 7 = 13

$2 + 5 + 6 = 13$

$3 + 3 + 7 = 13$

$3 + 4 + 6 = 13$

$3 + 5 + 5 = 13$

$4 + 4 + 5 = 13$

Остальные комбинации получаются из этих простой перестановкой возрастов.

Третий ответ — произведение возрастов равно числу окон. Кажется, что это вообще никак нам не помогает, потому что мы не знаем количества окон в доме, — но это не так.
Если бы этого ответа было достаточно, то первый бы сразу назвал возраст, но раз он этого не сделал, значит, информации было недостаточно.

Посмотрим на произведения всех комбинаций возрастов

$1 \times 1 \times 11 = 11$

$1 \times 2 \times 10 = 20$

$1 \times 3 \times 9 = 27$

$1 \times 4 \times 8 = 32$

$1 \times 5 \times 7 = 35$

$1 \times 6 \times 6 = 36$

$2 \times 2 \times 9 = 36$

$2 \times 3 \times 8 = 48$

$2 \times 4 \times 7 = 56$

$2 \times 5 \times 6 = 60$

$3 \times 3 \times 7 = 63$

$3 \times 4 \times 6 = 72$

$3 \times 5 \times 5 = 75$

$4 \times 4 \times 5 = 80$

Раз этого ответа про количество окон оказалось недостаточно, значит в доме было столько окон, что под это число попадали сразу несколько результатов произведений.
Мы выделили их в таблице. Все остальные числа давали бы однозначный ответ про возраст, а для числа 36 есть несколько вариантов, поэтому первый сказал, что этого ему недостаточно.

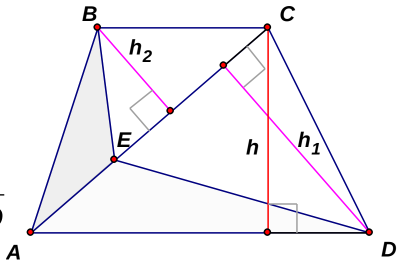
Четвёртый ответ — старший сын рыжий. Цвет волос нам не так важен, как количество старших сыновей. Так как «старший сын» означает, что он такой старший один, значит, вариант 1 — 6 — 6 нам не подходит, потому что в нём старших сыновей двое. Остаётся только один вариант: 2 — 2 — 9.

Ответ: старшему сыну 9 лет, двум другим — по 2 года.

№2

Решение

Пусть h_1 и h_2 – перпендикуляры, опущенные на диагональ AC из вершин D и B соответственно, а h – высота трапеции (см. рис. 2). Тогда



$$\frac{1}{2}=\frac{S_{ABE}}{S_{AED}}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot h_2}{\frac{1}{2}AE\cdot h_1}=\frac{h_2}{h_1}=\frac{\frac{1}{2}h_2\cdot AC}{\frac{1}{2}h_1\cdot AC}=\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{1}{2}h\cdot BC}{\frac{1}{2}h\cdot AD}=\frac{BC}{AD}$$

.

Ответ: $\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$

№3

При каких x функция У= ∜(x+10) -√(2-x) принимает положительные значения?

D(y) =$[-10;2]$

Для получения ответа необходимо решить неравенство

∜(x+10) -√(2-x)>0, ∜(x+10) >√(2-x).

Решением неравенства являются x∈ (-1;6). Учитывая область определения функции найдем ответ на вопрос.

Функция принимает положительные значения при x∈ (-1;2].

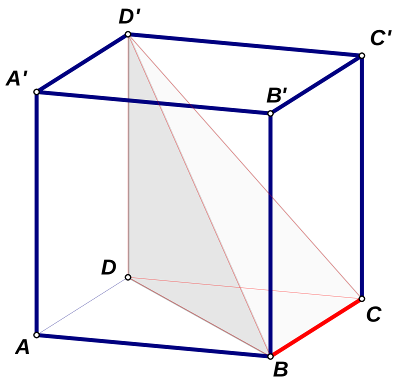
Возможно и графическое решение данного задания.

Ответ: x∈ (-1;2].

№4

Первый способ

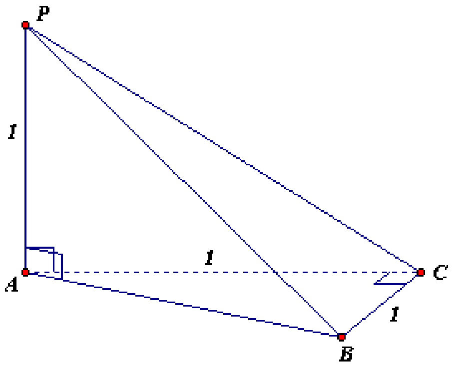
Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1 (см. рис. ниже). Так как диагональ единичного квадрата равна $\sqrt{2}$, а диагональ единичного куба равна $\sqrt{3}$, то $BDD'C$ – один из тетраэдров, которые можно составить из отрезков, указанных в условии. Очевидно, что все его грани – прямоугольные треугольники.



Второй способ

Такой тетраэдр можно составить и не используя куб. Например, рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами AC = BC = 1 и восстановим перпендикуляр AP к плоскости этого треугольника длины 1 (см. рис. ниже). По определению прямой, перпендикулярной плоскости, PA⊥AB и PA⊥AC Проведя отрезки PB и PC, получим: PC = AB = $\sqrt{2}$, PB = $\sqrt{3}$ (угол PCB – прямой по теореме о трех перпендикулярах).

<u>Ответ</u>: все четыре грани.



№5

$$\begin{cases} xy+z=94, \\ x+yz=95; \end{cases} \qquad \begin{cases} -xy-z=-94, \\ x+yz=95; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x+yz-xy-z=1; \\ (x-z)\cdot(1-y)=1; \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-z=1, \\ 1-y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x-z=-1, \\ 1-y=-1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ z=94, \\ x=95; \end{cases} \\ \begin{cases} x=31, \\ y=2, \\ z=32. \end{cases} \end{array}\right.$$

Возможны варианты

<u>Ответ</u>: $(x; y; z)$; (95; 0; 94); (31; 2; 32).